

УДК 512.538

Довбняк Т.С., Заторський Р.А.

**ПАРАФУНКЦІЇ МАТРИЦЬ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ТА ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ  
СТРУКТУРИ**

Довбняк Т.С., Заторський Р.А. *Парафункції матриць вертикальної та горизонтальної структури* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 36–42.

Досліджуються властивості парафункцій матриць вертикальної та горизонтальної структури та будуються деякі загальні формули обернення поліноміальних послідовностей.

**1 ВСТУП**

Парафункції трикутних матриць [4] спеціальної структури відіграють важливу роль у комбінаторному аналізі та теорії чисел. Одним із таких важливих класів трикутних матриць є трикутні матриці похилої структури досліджені у [3].

У статті досліджуються деякі властивості парафункцій трикутних матриць вертикальної  $V = (v_{0 \cdot i + j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$  та горизонтальної  $H = (h_{i + 0 \cdot j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$  структури, зокрема, для них будуються загальні формули обернення [1].

**2 ДОПОМІЖНІ ПОНЯТТЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ**

Матриця виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n, \quad (1)$$

з елементами із деякого числового поля, називається трикутною матрицею.

Роль одиничної матриці відіграє матриця виду

$$I = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n},$$

де  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 18B30, 54B30.

*Ключові слова і фрази*: трикутна матриця, парафункції, матриця горизонтальної структури, матриця вертикальної структури.

**Означення 1.** [4]. Нехай  $A$  — трикутна матриця (1). Парадетерміантом та парадетерміантом трикутної матриці  $A$  називають відповідно числа:

$$\text{ddet}(A) = \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = \sum_{r=1}^n \sum_{p_1+\dots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^r \{a_{p_1+\dots+p_s, p_1+\dots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\text{pper}(A) = \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] = \sum_{r=1}^n \sum_{p_1+\dots+p_r=n} \prod_{s=1}^r \{a_{p_1+\dots+p_s, p_1+\dots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння  $p_1 + p_2 + \dots + p_r = n$ , а символом  $\{a_{i,j}\}$  позначено факторіальний добуток елемента  $a_{i,j}$ , що задається рівністю

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}.$$

**Теорема 1.** [2]. Оберненою трикутною матрицею  $A^{-1}$  до трикутної матриці (1) є матриця

$$(b_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n} = \left( \frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \left\langle \frac{a_{r+j+1, s+j}}{a_{r+j+1, s+j+1}} \right\rangle_{1 \leq s \leq r \leq i-j-1} \right)_{1 \leq j \leq i \leq n}.$$

Нехай  $\mathcal{P}_n$  — лінійний простір векторів многочленів і  $f = (f_1, \dots, f_n)$  — деякий його елемент, причому  $\deg(f_i) = i - 1, i = 1, 2, \dots, n$ . Якщо

$$Af = g, \quad (2)$$

то трикутну матрицю (1) можна інтерпретувати як лінійний оператор  $A$ , який переводить вектор многочленів  $f$  у вектор многочленів  $g$ . Із останньої рівності отримаємо рівність

$$f = A^{-1}g, \quad (3)$$

де  $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ .

Із рівностей (2), (3) випливають відповідно формули обернення поліноміальних послідовностей  $g$  і  $f$ :

$$g_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} f_i, \quad f_n = \sum_{i=1}^n b_{ni} g_i.$$

### 3 ФОРМУЛИ ОБЕРНЕННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Побудуємо дві пари загальних формул обернення поліноміальних послідовностей, породжених трикутними матрицями вертикальної та горизонтальної структури. Справедлива наступна

**Теорема 2.** Нехай  $V = (v_{0.i+j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$  і  $H = (h_{i+0.j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$  деякі трикутні матриці вертикальної та горизонтальної структури з елементами із деякого числового поля і  $f$  та  $g$  — деякі вектори многочленів, тоді справедливі формули обернення для відповідних поліноміальних послідовностей:

$$g_n = \sum_{i=1}^n v_i f_i, \quad f_n = \frac{1}{v_n}(g_n - g_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (4)$$

та

$$g_n = h_n \sum_{i=1}^n f_i, \quad f_n = \frac{1}{h_n}g_n - \frac{1}{h_{n-1}}g_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

*Доведення.* Оберненими матрицями до матриць  $V$  та  $H$  є відповідно матриці:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_1} & & & & \\ -\frac{1}{v_2} & \frac{1}{v_2} & & & \\ 0 & -\frac{1}{v_3} & \frac{1}{v_3} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{v_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{v_n} & \frac{1}{v_n} \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & & & & \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & & & \\ 0 & -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}.$$

Перемножуючи останні рядки цих матриць на вектор многочленів  $g$  отримаємо відповідно рівності (4) та (5).  $\square$

#### 4 ПАРАФУНКЦІЇ МАТРИЦЬ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ТА ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

**Теорема 3.** Нехай  $V$  — матриця вертикальної структури із теореми 2, тоді справедливі рівності:

$$\text{ddet}(V) = 0, \quad \text{pper}(V) = 2^{n-1} \prod_{i=1}^n v_i.$$

*Доведення.* Виносимо за знак парафункції спільний множник  $v_i$  із  $i$ -го стовпця та використовуємо той факт, що парадетермінант трикутної матриці з одиничними елементами дорівнює нулю, а параперманент цієї матриці дорівнює  $2^{n-1}$ .  $\square$

**Теорема 4.** Нехай

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & & & & \\ h_2 & h_2 & & & \\ h_3 & h_3 & h_3 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ h_n & h_n & h_n & \dots & h_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

деяка трикутна матриця із елементами числового поля  $K$ , тоді виконуються рівності

$$\begin{aligned} \text{ddet} H &= H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n)_n \\ &= h_n \cdot (H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1} - H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_n)_{n-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{pper}H &= H^+(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n)_n \\ &= h_n \cdot (H^+(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1} + H^+(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_n)_{n-1}), \end{aligned} \quad (8)$$

*Доведення.* Розкладемо парадетермінант матриці (6) за елементами останнього рядка

$$\begin{aligned} H(h_1, h_2, \dots, h_n) &= h_n \cdot H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}) \\ &\quad - h_n \cdot (h_n H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}) - h_n^2 H(h_1, h_2, \dots, h_{n-3}) + h_n^3 H(h_1, h_2, \dots, h_{n-4}) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-3} h_n^{n-2} H(h_1) + (-1)^{n-2} h_n^{n-1}). \end{aligned}$$

Але вираз у дужках правої частини останньої рівності є розкладом парадетермінанта

$$H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_n) = \left\langle \begin{array}{cccccc} h_1 & & & & & \\ h_2 & h_2 & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ h_{n-2} & h_{n-2} & \dots & h_{n-2} & & \\ h_n & h_n & \dots & h_n & h_n & \end{array} \right\rangle$$

за елементами останнього рядка. Рівність (8) доводиться аналогічно.  $\square$

**Наслідок 1.** Якщо  $h_{n-1} = h_n$ , то

$$\begin{aligned} H(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_{n-1})_n &= 0, \\ H^+(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_{n-1})_n &= 2 \cdot h_{n-1} \cdot H^+(h_1, h_2, \dots, h_{n-2}, h_{n-1})_{n-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

*Доведення.* Справедливість рівностей цього наслідку безпосередньо впливає із рекурентних рівностей (7), (8).  $\square$

Застосовуючи послідовно (9) до параперманента матриці (6), отримаємо

**Наслідок 2.** Якщо  $h_1 = \dots = h_n = h$ , то  $H^+(h_1, h_1, \dots, h_1)_n = 2^{n-1} \cdot h^n$ .

**Теорема 5.** Якщо у матриці (6) елементи утворюють геометричну прогресію і виконуються рівності  $h_2 = h_1 q$ ,  $h_3 = h_1 q^2$ ,  $\dots$ ,  $h_n = h_1 q^{n-1}$ , де  $h_1, q \in \mathbb{R}$ , то парафункції матриць горизонтальної структури виражаються через відповідні парафункції матриць похилої структури

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ q & 1 & & & \\ q^2 & q & 1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

причому справедливі рівності

$$\begin{aligned} H(h_1, h_1 q, \dots, h_1 q^{n-1})_n &= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} d\det Q \\ &= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \dots \cdot \lambda_n!} q^{\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} \lambda_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^+(h_1, h_1q, \dots, h_1^n q^{n-1})_n &= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{pper} Q \\
&= h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_n!} q^{\lambda_2+3\lambda_3+\dots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n},
\end{aligned} \tag{11}$$

де  $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

*Доведення.* Винесемо з  $i$ -того стовпця парадетермінанта

$$\left\langle \begin{array}{cccccc} h_1 & & & & & \\ h_1q & h_1q & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ h_1q^{n-2} & h_1q^{n-2} & \dots & h_1q^{n-2} & & \\ h_1q^{n-1} & h_1q^{n-1} & \dots & h_1q^{n-1} & h_1q^{n-1} & \end{array} \right\rangle$$

множник  $h_1q^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , за його знак, тоді отримаємо парадетермінант (10) матриці похилої структури, який при допомозі твердження 2.5.2. (див. [4, с. 141]) можна подати у вигляді

$$h_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_n!} q^{\lambda_2+3\lambda_3+\dots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n}.$$

Рівність (11) доводиться аналогічно. □

**Теорема 6.** Нехай  $h_i, i = 1, 2, \dots, n-1$  належать деякому числовому полю  $K$  і

$$P(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}; x) = \begin{pmatrix} x & & & & & \\ h_1 & x & & & & \\ h_2 & h_2 & x & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\ h_{n-2} & h_{n-2} & \dots & h_{n-2} & x & \\ h_{n-1} & h_{n-1} & \dots & h_{n-1} & h_{n-1} & x \end{pmatrix}, \tag{12}$$

причому справедливі рівності:

$$\begin{aligned}
&\text{ddet}(P(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}; x)) \\
&= p_{n,0}x^n - p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} - \dots + (-1)^i p_{n,i}x^{n-i} + \dots + (-1)^{n-1} p_{n,n-1}x, \\
&\quad \text{pper}(P(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}; x)) \\
&= p_{n,0}x^n + p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} + \dots + p_{n,i}x^{n-i} + \dots + p_{n,n-1}x,
\end{aligned}$$

тоді коефіцієнти многочленів задовольняють рекурентні рівності

$$p_{n,i} = p_{n-1,i} + h_{n-1}p_{n-2,i-1} + h_{n-1}^2p_{n-3,i-2} + \dots + h_{n-1}^{n-2}p_{1,i-n+2} + h_{n-1}^{n-1}p_{0,i-n+1}, \tag{13}$$

де  $n = 0, 1, \dots; i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $p_{n,0} = 1, p_{n,<0} = 0$ .

*Доведення.* Розкладаючи парадетермінант із теореми за елементами останнього рядка, дістанемо рівності

$$\begin{aligned}
& p_{n,0}x^n - p_{n,1}x^{n-1} + p_{n,2}x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}p_{n,n-1}x \\
& = x(p_{n-1,0}x^{n-1} - p_{n-1,1}x^{n-2} + p_{n-1,2}x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2}p_{n-1,n-2}x) \\
& - h_{n-1}x(p_{n-2,0}x^{n-2} - p_{n-2,1}x^{n-3} + p_{n-2,2}x^{n-4} - \dots + (-1)^{n-3}p_{n-2,n-3}x) \\
& + h_{n-1}^2x(p_{n-3,0}x^{n-3} - p_{n-3,1}x^{n-4} + p_{n-3,2}x^{n-5} - \dots + (-1)^{n-4}p_{n-3,n-4}x) - \dots \\
& + (-1)^{n-2}h_{n-1}^{n-2}xp_{1,0}x + (-1)^{n-1}h_{n-1}^{n-1}xp_{0,0}x^0,
\end{aligned}$$

з яких після зрівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $x$  дістанемо рекурентні рівності (13). Для парперманентів співвідношення (13) доводяться аналогічно.  $\square$

Запишемо кілька перших многочленів  $\text{ddet}(P(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}; x))$  :

$$\begin{aligned}
& \text{ddet}(P(; x)) = x, \\
& \text{ddet}(P(h_1; x)) = x^2 - h_1x, \\
& \text{ddet}(P(h_1, h_2; x)) = x^3 - (h_1 + h_2)x^2 + h_2^2x, \\
& \text{ddet}(P(h_1, h_2, h_3; x)) = x^4 - (h_1 + h_2 + h_3)x^3 + (h_2^2 + h_1h_3 + h_3^2)x^2 - h_3^3x, \\
& \text{ddet}(P(h_1, h_2, h_3, h_4; x)) = \\
& = x^5 - (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)x^4 + (h_2^2 + h_1h_3 + h_3^2 + h_1h_4 + h_2h_4 + h_4^2)x^3 - (h_3^3 + h_4h_2^2 + h_4^2h_1 + h_4^3)x^2 + h_4^4x,
\end{aligned}$$

**Наслідок 3.** Якщо у матриці (12)  $h_i = 1$ , то многочлен  $P(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}; x)$  запишеться у вигляді бінома, а співвідношення (13) у вигляді співвідношень

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-2}{i-1} + \dots + \binom{n-i-1}{0}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Якщо, наприклад,  $h_i = i$ , то коефіцієнти многочлена  $P(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}; x)$  при  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  утворюють числовий трикутник

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 16 & -27 \\ 1 & -10 & 44 & -123 & 256 \\ 1 & -15 & 99 & -403 & 1241 & 3125 \\ 1 & -21 & 195 & -1099 & 4499 & -15569 & 46656 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

відсутній у відомій "On-Line Encyclopedia of Integer Sequences".

Якщо у матриці (14) зробити підстановку  $a_i = -i$ , то отримаємо многочлени, коефіцієнти яких утворюють числовий трикутник (14) із додатними елементами, що узгоджується із теоремою [4] про зв'язок парадетермінанта трикутної матриці із парперманентом відповідної трикутної матриці.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с.
2. Заторский Р.А., Малярчук А.Р. *Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения* // Матем. заметки. — 2009. — Т.85, Вып. 1. — С. 12–21.
3. Заторський Р.А. *Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2011. — Т.1, №4. — С. 59–66.
4. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 10.04.2012

---

Dovbniak T.S., Zatorsky R.A. *Parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure*, Carpathian Mathematical Publications, 4, 1 (2012), 36–42.

The properties of parafunctions of matrices of vertical and horizontal structure are investigated. Some general formulas of inversion of polynomial sequences are built.

Довбняк Т.С., Заторський Р.А. *Парафункції матриць вертикальної і горизонтальної структури* // Карпатські математическі публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 36–42.

Исследуются свойства парафункций матриц вертикальной и горизонтальной структуры и строятся некоторые общие формулы обращения полиномиальных последовательностей.